ГАТИН Г. Н.
А СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ПАРАДОКС РАССЕЛА?

УДК 510.22, ВАК 1.2.2. / 05.13.18, ГРНТИ 20.01.07

А существует ли парадокс Рассела?

Г. Н. Гатин

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта

Показывается простое решение парадокса Рассела. Высказывается мнение о непротиворечивости интуитивной теории множеств.

Ключевые слова: *парадокс Рассела, интуитивная теория множеств.*

Does Russell's paradox exist?

G. N. Gatin

Ukhta State Technical University,Ukhta

A simple solution to Russell's paradox is shown. An opinion is expressed about the consistency of the intuitive set theory.

Keywords: *Russell's paradox, intuitive set theory.*

Введение

В 1874 году вышла статья Г. Кантора, в которой было введено понятие мощности множества. Этот год можно считать годом рождения теории множеств. Часть математиков, однако, резко критиковали нововведение Г. Кантора. Критика усилилась после открытия в 1901 году Б. Расселом парадокса, который с тех пор называется парадоксом Рассела. Сторонники теории множеств приложили немало усилий, чтобы разрешить этот парадокс. Шли при этом двумя путями. Предлагались различные решения именно этого парадокса. Но в теории множеств нашлись и другие парадоксы. С другой стороны строилась аксиоматическая теория множеств, таким образом, чтобы парадоксы не возникали. Предложенная Г. Кантором теория стала называться «интуитивной теорией множеств». Везде в литературе утверждается, что интуитивная теория множеств приводит к парадоксам или «интуитивная теория множеств противоречива»! Аксиоматические теории множеств непротиворечивы. Достигается это в основном определёнными ограничениями на понятие множества.

Что удивительно, несмотря на противоречивость, пользуются математики именно интуитивной теорией множеств. [1]. Считается, что непротиворечивость интуитивной теории доказана аксиоматикой. Но если это так, то должно быть предложено разрешение парадоксов. Однако в стандартных учебниках автор не нашёл разрешений парадоксов. Зато встречаются фразы типа «Математиками предложены разные решения парадоксов, но они принимаются не всеми математиками». Ну математиков понять можно: если аксиоматика теории множеств построена так, что парадоксы не возникают, то зачем их разрешать. С другой стороны, если разрешить парадоксы, то аксиоматика теории множеств должна быть другой и не надо будет накладывать ограничения на понятия «множество».

Конечно же, автор смотрел и специальную литературу. В [3, стр 10-12] приведено одно из разрешений парадокса Рассела. «Объяснение в сущности не сложно. Когда мы строим какое-то множества z, выбирая его элементы, мы ещё не имеем z как объект и поэтому не можем использовать его качестве элемента множества z.» [600, стр. 10]. Здесь возникает первый вопрос: «А с какого момента мы можем использовать z как объект?» Ответ «Как только построим» неудовлетворителен, так как z может быть бесконечным. Фактически, такой подход вводит два типа множеств: завершённые множества и строящиеся множества, но как отличить множества одного типа от множества другого типа?

Далее, «Продолжая этот анализ, приходим к следующей схеме. Множества строятся последовательно по шагам» [3, стр. 10] Нравится нам это или нет, но число этих шагов счётно, а следовательно, и множество, которое мы строим счётно. Что делать с несчётными множествами? В форме парадокса предложенным Расселом

$$y \in y \leftrightarrow y \notin y$$

нет предположений о счётности. Мы можем всё-таки счётным числом шагов построить несчётное множество. Делаем разбиение несчётного множества на счётное число подмножеств. Далее задача тривиальна. Но мы снова используем как объект ещё не построенное множество!

Мы достаточно подробно разобрали решение предложенное Дж. Барвайсом, поскольку его идеей мы воспользуемся ниже.

А пока, давайте всё-таки разберём парадокс Рассела. Начнём с формы парадокса в виде загадки о брадобрее. Как известно, в неком селении брадобрей, то ли он сам решил, то ли ему приказали, брить тех и только тех, кто не бреется сам. Загадка начинается, когда мы пытаемся причислить брадобрея к одному из этих множеств.

Решение первое – ленивое. Поскольку брадобрей интуитивно рассматривается как нечто внешнее по отношению к жителям селения, хотя там и живёт, не стоит никуда его причислять. Парадокса нет, брадобрей доволен. Во-первых, решение нечёткое. Во-вторых, решение использует некую иерархию, о которой мы ничего не знаем.

Но основная идея оказывается правильной: брадобрей нечто внешнее по отношению к тем множествам куда его хотят вставить. Вообще-то когда мы распределяем элементы по множествам от нас требуют, чтобы мы сначала определили число этих множеств! При этом надо доказать, что эти множества не пересекаются и любой элемент обязательно попадает в одно из этих множеств. Чуть ниже предположение автора почему этого не сделано при предъявлении парадокса Рассела.

Решение второе – самое простое. А давайте рассмотрим всю вселенную, извините, весь универсум. По свойству «бриться», мы получаем четыре непересекающихся множества. 1. Те кто никогда не бреются; 2. Те кто всегда бреются сами; 3. Те кого всегда бреет брадобрей; 4. Те кто может и сам побриться, а может быть побритым брадобреем. Очевидно, что брадобрей попадает в четвёртое множество. Тогда всё становится понятным: мы берём элемент четвёртого множества и пытаемся причислить его либо ко второму, либо к третьему множеству, что невозможно. Логика и показывает это.

Аналогично разрешается и антиномия Греллинга (1908 г.) [2, стр. 21-22]. По свойству «*гетерологичности»* прилагательные образуют три множества, а не два.

Обратите внимание, что в обоих случаях мы априори задали условия, а потом пытаемся под эти условия подогнать естественный мир. Стоит ли удивляться, что естественный мир гораздо шире наших куцых условий. Но логика, ох уж эта логика, ясно нам показывает, что мы что-то делаем неправильно.

В форме предложенный Расселом

$$y \in y \leftrightarrow y \notin y$$

разрешить парадокс несколько сложнее.

Отвлекаясь от свойств y, мы можем утверждать, что обе части этой эквиваленции либо истинны, либо ложны. Если левая часть ложна, то парадокс отсутствует и разбирать нечего. Если же запись $y \in y$ истинна, то отношение принадлежности обладает свойством рефлексивности, и каждое множество принадлежит самому себе (что естественно). Но тогда множества y, которое $y \notin y$, просто не существует.

Когда вы находите эти простые решения, то возникает вопрос: «А что, математики за сто с лишним лет не могли найти эти решения?»

Начнём с фразы советских/русских математиков:

«Не всякое свойство порождает множество»!

Ой! И нет парадокса Рассела, парадокса Греллинга и ещё многих других. А раз парадоксов нет, то и разрешать их не надо. Может быть эта точка зрения и привела к тому, что в литературе превалирует западная точка зрения.

Но открываем [2] на стр. 17. Там мелким шрифтом чёрным по белому написано: «Внимательный читатель мог бы, пожалуй, счесть, что здесь налицо некоторое преувеличение. Он мог бы возразить, что противоречие было выведено среди прочих посылок также из предположения, что такие объекты, как множество всех множеств, не являющихся собственными элементами (названное нами 'S'), существуют; что, следовательно, мы вправе лишь заключить, что если S существует, то S есть элемент S в том и только в том случае, когда S не есть элемент S; а из этого заключения вытекала бы лишь ложность антецедента (по reductio ad absurdum), т. е. что S не существует или, попросту говоря, что такого зверя, как S, не бывает». *Другими словами – парадокса нет!*

Но следующим абзацем на той же самой странице: «Указанное возражение справедливо (оно будет рассмотрено ниже, в гл. III). Но это мало способствует уменьшению парадоксальности полученного результата: тот факт, что не может существовать множества, состоящего в точности из всех объектов, удовлетворяющих чётко определенному условию, отнюдь не кажущемуся каким-то исключительным, а именно не содержащих себя в качестве элемента,

— пожалуй, не менее противен здравому смыслу, чем прямое противоречие.» *Возражение эмоциональное, но не математическое.*

Ух ты, оказывается все знают, что парадокса (Рассела) нет, но многим очень хочется, чтобы он был?

Одна из причин этого желания весьма проста: мы пользуемся двоичной логикой. В двоичной логике предикат имеет лишь два состояния, откуда и рассматриваются только два множества. А в троичной логике (воспользуемся предложенной Я. Лукасевичем с третьим значением ‘не определено’) ни парадокс Рассела, ни парадокс Греллинга, ни парадокс лжеца просто не возникают, поскольку предикат может принять три состояния. Возражение, что человечество пользуется двоичной логикой не состоятельно, поскольку философия буддизма построена как раз в троичной логике. Как предложите рассматривать, например, утверждение, что нирвана это не жизнь, не смерть, а нечто другое. Вообще, неявное использование человечеством троичной и n-значных логик это тема отдельной статьи, поэтому вернёмся к рассматриваемым проблемам.

Другая причина желания сохранить парадокс Рассела «**интуитивный принцип абстракции или аксиома свёртки:**

Любое свойство *P(x)*определяет некоторое множество *A*, с помощью условия: элементом множества *A* являются те и только те объекты *a*, которые имеют свойство *P*. (ещё раз обращаю внимание: либо объект имеет свойство *P*, либо не имеет, третьего не дано)

У А.А, Френкеля и И. Бар-Хиллела значительно строже [2, стр. 55]

«Аксиома (V) ВЫДЕЛЕНИЯ) <Axiomofsubsets> у. **Для любого множества а и любого одноместного предиката [3]) $\mathfrak{B}$ имеющего смысл («определенного» (definite))) для всех членов x множества а, существует вполне определенное множество, содержащее в точности те члены x множества а, которые удовлетворяют предикату$\mathfrak{B}$ (для которых выполнено условие $\mathfrak{B}$(x)),»**

Но как это так “**Для** <u>**любого**</u> **множества а и** <u>**любого**</u> **одноместного предиката»**? Достаточно сильное заявление. Другими словами: “Мы не хотим выяснять при каких условиях одноместный предикат $\mathfrak{B}$ создаёт множество, а просто постулируем ‘всегда’”. Нам так хочется! Реальная жизнь оказывается другой. И предикат $y \notin y$ множества не создаёт. Мы это показали, допустив при этом рефлексивность отношения принадлежности. Но всем известно, что в общепринятых курсах по теории множеств ничего не говорится о свойствах отношения принадлежности. Молчаливо полагается, что оно нерефлексивно, несимметрично, нетранзитивно.

Очевидно, что если $\in$ нерефлексивно, то выражение $y \in y$ незаконно. Что говорится по этому поводу у авторитетов. Снова открываем [2] на стр. 47: “Между отношениями $\in$ и $\subseteq$ (первое из которых в нашем изложении является первоначальным, а второе вводится по определению) имеется серьезное различие. Путаница в их употреблении, усугубленная свойственной индоевропейским языкам двусмысленностью, — известно, что связка 'есть' использовалась последователями Аристотеля в обоих этих (и многих других) смыслах, — на раннем этапе развития логики имела гибельные последствия.

Если придерживаться нашей терминологии, то **каждое множество включает <qcomprises> себя само и свои подмножества, но, вообще говоря, не содержит <qcontains> ни себя, ни своих подмножеств**.» (выделено мною)

Мы не отрицаем, что отношения принадлежности и включения разные отношения, но пока никто не доказал, что пересечение областей значений этих отношений пусто.

Вы никогда не задумывались, почему это эмоциональное утверждение для первокурсника вставлено в серьёзный математический труд? Да если допустить рефлексивность отношения принадлежности, то парадокс Рассела исчезает как дым. А если нет парадокса Рассела, то зачем такая страшная аксиоматика?

На основании всего вышесказанного можно сделать вывод — интуитивная теория множеств непротиворечива. Не бог весть какой вывод, все и так это знали. Но если все это знают, почему в литературе утверждается обратное?

Да, в интуитивной теории множеств есть и другие парадоксы. Один из наиболее страшных – множество всех множеств. Если здраво рассуждать, то множество всех множеств не может быть построено в принципе. Здесь как раз и работает идея.

Дж. Барвайса.

Обозначим множество всех множеств $\mathfrak{M}$.

Возражение первое. $\mathfrak{M}$ содержит как счётные, так и не счётные подмножества, а значит само $\mathfrak{M}$ несчётно. Но пошаговой процедурой построения мы может построить только счётные множества.

Возражение второе. Давайте разберём построение множеств по существу.

Пусть мы строим множество натуральных чисел. (Вообще-то все воспринимают это множество как нечто данное, более того, и логика и теория множеств построены в предположении существования натуральных чисел, иначе как объяснить широко используемую индексацию). Пусть мы где-то в середине процесса. Пусть слева от нас уже построенное подмножество. Его мощность $\aleph_0$. Пусть справа от нас подмножество, из которого мы выбираем элементы множества. Его мощность $\aleph_0$. Процесс выбора элемента из одного подмножества и помещения элемента в другое подмножество не меняет мощностей обоих подмножеств.

Ситуация существенно меняется, когда мы строим множество всех множеств. При каждом шаге мощность левого подмножества не меняется. Мощность же правого подмножества всё время растёт. Ведь поместив элемент a в $\mathfrak{M}$, мы затем должны будем поместить все подмножества, в которые входит элемент a, все функции, которые можно построить на этих подмножествах и т.д. Другими словами, с каждым шагом мощность правого подмножества возрастает более чем на континуум. Фактически с каждым шагом мощность правого подмножества возрастает на мощность $\mathfrak{M}$.

Но мы не можем счётным числом шагов исчерпать континуум, не говоря уже о больших мощностях.

Основное возражение на это рассуждение: не доказано отсутствие другой процедуры построения множества $\mathfrak{M}$. На что всегда можно ответить – продемонстрируйте это процедуру.

Таким образом, множество $\mathfrak{M}$ не может быть построено.

Самое неожиданное, множество всех множеств существует и все его знают!

Это ВСЕЛЕННАЯ!

И опять слышу возражение внимательных читателей: множество – это собрание мыслимых объектов. На что опять-таки можно возразить…. Однако, мы забираемся в весьма серьёзные эмпирии, которые вряд ли следует разбирать на ограниченном объёме этой статьи.

Цель этой статьи показать простое решение парадокса Рассела. При этом мы видим, что затрагиваются серьёзнейшие пласты на только математики, но и философии.

Одновременно хотелось показать непротиворечивость интуитивной теории множеств, хотя бы на основании того, что математики используют именно её, но и аксиоматические теории стороной не обходят. (Безусловно, непротиворечивость теории доказывается, а не показывается).

Но это означает, что множества могут быть членом самих себя. Это означает, чтобы можем строить очень большие множества. Это потребует пересмотра понятие класса и многое другое.

С точки зрения автора, антиномий в интуитивной теории множеств в общем-то нет. Возникает вопрос: как бы развивалась теория множеств и математика в отсутствии антиномий. Здесь уместно привести высказывание А. Мостовского, которое приводится в [2, примечания стр. 31-32] «В начале своего весьма глубокого и исчерпывающего обзора проблематики оснований математики Мостовский даёт следующие разъяснения по поводу этой проблематики, теории множеств и антиномий: «Современный этап исследований по основаниям математики начался с момента возникновения теории множеств. Её абстрактность и появившийся в ней отрыв от традиционного и близкого к опыту материала при одновременной возможности применять многие её результаты к конкретным вопросам из классической области создали потребность проанализировать её эпистемологические (теоретико-познавательные) основания. Эта потребность значительно возросла с момента возникновения антиномий. **Однако даже если бы никакие антиномии в теории множеств не появились, вопрос обоснования теории множеств был бы несомненно поставлен и обсужден**» (Мостовский, 55. [Цитируется по русскому изданию 1954. — Перев.]).» (выделено мною.)

Список использованных источников и литературы

1. Н. Бурбаки, Теория множеств : М, МИР. – 1965. – 455 с.

2. А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств : М, МИР. – 1966. – 557 с.

3. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса, часть II, теория множеств. – М, Наука. – 375 с.

List of references

1. N. Bourbaki, Set Theory : M, MIR. – 1965. – 455 p.
2. A. Frenkel, I. Bar-Hillel, Foundations of set theory: M, MIR. – 1966. – 557 p.
3. Reference Book on Mathematical Logic, ed. J. Barweiss, Part II, Set Theory. - M, Science. – 375 p.